02/12/2015

1) Υπάρχει μοναδικό πολυώνυμο παρεμβολής $p \in \mathbb{P}_n$ της f στα σημεία $x_0, x_1, \dots, x_n$ / $x_i \neq x_j$

2) Σφάλμα: $f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$, $\xi \in (\min\{x, x_0, \dots, x_n\}, \max\{x, x_0, \dots, x_n\})$

3) Παράσταση Lagrange $p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$

Αν $f \in \mathbb{P}_n$ τότε το πολυώνυμο παρεμβολής $p \in \mathbb{P}_n$ της f στα $x_0, x_1, \dots, x_n$ ταυτίζεται με την f, λόγω μοναδικότητας της παρεμβολής.

<u>ΑΣΚΗΣΗ</u> Να υπολογιστεί η ποσότητα $\sum_{i=0}^{n} L_i(x)$, όπου $L_i \in \mathbb{P}_n$, $i = 0, 1, \dots, n$ τα πολυώνυμα Lagrange ως προς τα σημεία $x_0, x_1, \dots, x_n$

$\sum_{i=0}^{n} L_i(x) = 1$. Θεωρούμε $f \equiv 1 \in \mathbb{P}_0 \subset \mathbb{P}_n$. Τα πολυώνυμα παρεμβολής στα $x_0, x_1, \dots, x_n$ θα είναι $p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x)$. Επειδή $f \in \mathbb{P}_n$, τότε $p(x) = f(x) = 1$

Γενικά: $\sum_{i=0}^{n} x_i^k L_i(x)$, $k \leq n$. Θεωρούμε $f(x) = x^k \in \mathbb{P}_k \subset \mathbb{P}_n$, τότε $p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x) = \sum_{i=0}^{n} x_i^k L_i(x)$. Επειδή η $f \in \mathbb{P}_n$, τότε $f = p$: $\sum_{i=0}^{n} x_i^k L_i(x) = x^k$

Πως θα υπολογίζουμε το πολυώνυμο παρεμβολής κατά Lagrange;

Να βρεθεί το πολυώνυμο παρεμβολής το πολύ 3ου βαθμού δηλ. $p \in \mathbb{P}_3$ που παρεμβάλλεται στη συνάρτηση

	0	1	2	3
x_i	-1	0	1	2
f_i	2	0	0	8

Θα πάρουμε τον τύπο κατά Lagrange:

$p(x) = f(x_0) L_0(x) + f(x_1) L_1(x) + f(x_2) L_2(x) + f(x_3) L_3(x)$

$= 2 \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)} + 8 \frac{(x+1)(x-0)(x-1)}{(2+1)(2-0)(2-1)}$

$= 2 \frac{x(x-1)(x-2)}{-6} + 8 \frac{x(x+1)(x-1)}{6} = -\frac{1}{3}(x^3 - 3x^2 + 2x) + \frac{4}{3}\frac{(x^3 - x)}{1} =$

$= x^3 + x^2 - 2x$

Παράσταση του Πολυωνύμου Παρεμβολής στη μορφή Newton

Έστω $f \in C[a,b]$ και $x_1, \dots, x_n$ διαφορετικά μεταξύ τους. Το πολυώνυμο $p \in P_n$ της f στα $x_0, x_1, \dots, x_n$ πληρεί τις σχέσεις $p(x_i) = f_i$.

Μπορώ να εκφράσω το p ως $p(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$

Τα a_i υπολογίζονται από τις σχέσεις $p(x_i) = f(x_i)$ $i=0,1,\dots,n$ με αναδρομική σχέση:

$p(x_0) = f_0 \iff a_0 = f_0$

$p(x_1) = f_1 \iff a_0 + a_1(x_1 - x_0) = f_1 \iff a_1 = \dfrac{f_1 - a_0}{x_1 - x_0}$

$p(x_2) = f_2 \iff a_0 + a_1(x_2-x_0) + a_2(x_2-x_1)(x_2-x_0) = f_2 \iff a_2 = \dfrac{f_2 - a_0 - a_1(x_2-x_0)}{(x_2-x_1)(x_2-x_0)} = \dfrac{\frac{f_2-a_0}{x_2-x_0} - a_1}{(x_2-x_1)}$

$p(x_3) = f_3 \iff a_3 = \left(\left(\dfrac{f_3 - a_0}{x_3 - x_0} - a_1\right) \Big/ (x_3 - x_1) - a_2\right) \Big/ (x_3 - x_2)$

Αναδρομικά.

Διαιρεμένες Διαφορές.

Ορίζουμε ως $\Delta^0(x_0)(f) = f(x_0)$: διαιρεμένη διαφορά μηδενικής τάξης

$\Delta^i(x_0, x_1, \dots, x_i)(f) = \dfrac{\Delta^{i-1}(x_1, \dots, x_i)(f) - \Delta^{i-1}(x_0, \dots, x_{i-1})(f)}{x_i - x_0}$ Αναδρομικός Τύπος $i = 1, 2, \dots$

τα άκρα.

π.χ.

$\Delta^1(x_0,x_1)(f) = \dfrac{\Delta^0(x_1)(f) - \Delta^0(x_0)(f)}{x_1 - x_0} = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$

π.χ.

$\Delta^2(x_0,x_1,x_2)(f) = \dfrac{\Delta^1(x_1,x_2)(f) - \Delta^1(x_0,x_1)(f)}{x_2 - x_0} = \dfrac{\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} - \frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_1-x_0}}{x_2 - x_0} = \dfrac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$

$- f(x_1) \dfrac{\frac{1}{(x_2-x_1)} + \frac{1}{(x_1-x_0)}}{x_2 - x_0} + \dfrac{f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \dfrac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} - \dfrac{x_1 - x_0 + x_2 - x_1}{(x_2-x_1)(x_1-x_0)\cancel{(x_2-x_0)}} + \dots$

$\dots = \dfrac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + \dfrac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + \dfrac{f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$

Αποδεικνύεται ότι $\Delta^i(x_0, x_1, \dots, x_i)(f) = \displaystyle\sum_{k=0}^{i} \dfrac{f(x_k)}{\prod_{j=0, j\neq k}^{i} (x_k - x_j)}$

Απόδειξη HW

Θα αποδείξουμε ότι a_i στην παράσταση του Νεύτωνα είναι $a_i = \Delta^i(x_0, x_1, \ldots, x_i)(f)$ για $i = 0, 1, \ldots, n$

Συμβολίζουμε ως $p(\underbrace{x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+j}}_{\text{παράμετροι}}; \underset{\text{μεταβλητή}}{x})$, το πολυώνυμο παρεμβολής το πολύ $j+1$ βαθμού στα $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+j}$

Παρατηρούμε $a_0 = f(x_0)$ (απ' την παράσταση κατά Νεύτωνα).

$$a_0 = \Delta^0(x_0)(f)$$

, ισχύει επειδή $p(x_0; x) = f(x_0)$. Υποθέτουμε ότι ισχύει για $i = n-1$. Δηλαδή $p(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}; x) = \Delta^0(x_0)(f) + \Delta^1(x_0, x_1)(f)(x - x_0) + \Delta^2(x_0, x_1, x_2)(f)(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + \Delta^{n-1}(x_0, \ldots, x_{n-1})(f) = (x - x_0) \ldots (x - x_{n-2})$

$p(x_0, \ldots, x_n; x)$ και το $p(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}; x)$ ταυτίζονται στα σημεία $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ επειδή είναι κοινά σημεία παρεμβολής. Τότε $p(x_0, x_1, \ldots, x_n; x) - p(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}; x) = a_n (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n) \iff p(x_0, x_1, \ldots, x_n; x) = p(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}; x) + a_n (x - x_0) \ldots (x - x_n)$

Ισχύει $$p(x_0, x_1, \ldots, x_n; x) = \frac{(x - x_0)\, p(x_1, x_2, \ldots, x_n; x) - (x - x_n)\, p(x_0, \ldots, x_{n-1}; x)}{x_n - x_0}$$

Πραγματικά για $x = x_0$ $p(x_0, \ldots, x_n; x_0) = f(x_0)$ $x = x_j$ $j = 1, 2, \ldots, n-1$

$$p(x_0, x_1, \ldots, x_n; x_j) = \frac{(x - x_0) f(x_j) - (x - x_n) f(x_j)}{x_n - x_0} = f(x_j)$$

$p(x_0, x_1, \ldots, x_n; x_n) = f(x_n)$. Υπολογίζω τον συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου: $a_n =$

$$= \frac{\Delta^{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)(f) - \Delta^{n-1}(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})(f)}{x_n - x_0} = \Delta^n(x_0, x_1, \ldots, x_n)(f)$$

Το $P(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}; x) = \Delta^0(x_0)(f) + \Delta^1(x_0, x_1)(f)(x - x_0) + \ldots + \Delta^{n-1}(x_0, \ldots, x_{n-1})(f)(x - x_0) \ldots (x - x_{n-2})$ Ισχύει απ' την υπόθ. της τέλειας επαγωγής